Комунальний заклад вищої освіти
«Одеська академія неперервної освіти Одеської обласної ради»
Кафедра методики викладання і змісту освіти

І.М. Мітельман
доцент, кандидат фізико-математичних наук,
заслужений вчитель України

ВИБРАНІ ПИТАННЯ ТЕОРІЇ МНОГОЧЛЕНІВ ДЛЯ КЛАСІВ З ПОГЛИБЛЕНИМ ВИВЧЕННЯМ МАТЕМАТИКИ ТА ПІДГОТОВКИ УЧНІВ ДО МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД

Матеріали науково-практичної консультації

Схвалено для практичного використання на засіданні кафедри методики викладання і змісту освіти, протокол від 24.12.2021 № 11

ОДЕСА
2021

МЕТА КОНСУЛЬТАТИВНО-МЕТОДИЧНИХ МАТЕРІАЛІВ

1. Активізація, актуалізація методичних прийомів адаптації деяких опорних теоретичних знань учителя математики, здобутих під час вивчення курсу загальної алгебри в педагогічному університеті, у розрізі навчальних потреб учня класу з профільним вивченням математики.
2. Розширення спеціалізованих компетентностей учителя математики з питань розв'язування та аналізу рівнянь вищих степенів, інших алгебраїчних задач, що зводяться до цього, як важливої складової курсу алгебри в класах з профільним вивченням математики.
3. Надання теоретичної та практичної допомоги вчителю математики для проведення уроків, факультативних і гурткових занять, підготовки обдарованих учнів до математичних турнірів, олімпіад, конкурсів-захистів Малої академії наук тощо.
4. Спрямування вчителів на організацію та методичний супровід викладання курсу математики на профільному рівні в старшій школі в контексті дидактичної проблеми підвищення якості математичної освіти професійного спрямування для обдарованого учнівського контингенту.

Ми пропонуємо формувальну систему теоретичних фактів і задач, спрямованих на багатоцільове комплексне застосування: проведення практичних занять з учителями, що проходять підвищення кваліфікації, самоосвіту вчителів і, звісно, на використання в класах з поглибленим вивченням математики, факультативних заняттях, математичних гуртках для обдарованих учнів.

I. ЛЕМА ПРО НУЛЬ-МНОГОЧЛЕН. ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ МНОГОЧЛЕН ЛАГРАНЖА

Розглянемо многочлен з дійсними коефіцієнтами

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 .$$

Лема. Нехай відомо, що для всіх $x \in \mathbf{R}$ $P(x) = 0$. Тоді всі його коефіцієнти дорівнюють нулю, тобто

$$a_n = a_{n-1} = \ldots = a_1 = a_0 = 0 .$$

Зауваження. Цей факт не слід вважати очевидним. (Очевидним є обернене твердження: якщо всі коефіцієнти многочлена дорівнюють нулю, то, звісно, усі значення $P(x)$ дорівнюють нулеві.)

Доведення. Якщо многочлен є константою, то твердження очевидне. Розглянемо многочлен степеня $n \geq 1$

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0.$$

Будемо вважати, що многочлен є **зведеним**, тобто старший коефіцієнт дорівнює 1 (це не впливає ані на зміст факту, ані на його доведення, оскільки ми можемо в рівності $P(x) = 0$ праву та ліву частину просто розділити на старший коефіцієнт $a_n \neq 0$). Отже, нехай $P(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$, причому для всіх $x \in \mathbf{R}$ $P(x) = 0$.

Візьмемо довільне число α, яке є більшим за **максимальне** з чисел

$$1,\ -nb_{n-1},\ -nb_{n-2}, \ldots,\ -nb_1,\ -nb_0.$$

Оскільки $\alpha > 1$, то $\alpha^k \geq \alpha$ для всіх $k \in \mathbf{N}$ (якщо число α, яке є більшим за 1, піднести до степеня з натуральним показником, то одержимо число, яке не менше за α; зрозуміло, що для $k = 1$ буде виконуватись рівність, а для $k > 1$ — строга нерівність).

Отже, маємо такі нерівності:

$$\boxed{\alpha^1} \geq \alpha \boxed{> -nb_{n-1}},\ \boxed{\alpha^2} \geq \alpha \boxed{> -nb_{n-2}},\ \ldots,\ \boxed{\alpha^{n-1}} \geq \alpha \boxed{> -nb_1},\ \boxed{\alpha^n} \geq \alpha \boxed{> -nb_0}$$

(ці нерівності випливають з нерівності $\alpha^k \geq \alpha$ для всіх $k \in \mathbf{N}$ та зі способу вибору числа α).

З цих нерівностей ми легко отримаємо, що

$$-\frac{1}{n} < \frac{b_{n-1}}{\alpha^1},\ -\frac{1}{n} < \frac{b_{n-2}}{\alpha^2},\ \ldots,\ -\frac{1}{n} < \frac{b_1}{\alpha^{n-1}},\ -\frac{1}{n} < \frac{b_0}{\alpha^n}\ (*).$$

Підставимо число α до виразу $P(x)$.

З одного боку, повинні отримати *нуль*, а з іншого, ураховуючи оцінки (*), маємо:

$$P(\alpha) = \alpha^n + b_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + b_1\alpha + b_0,$$

$$P(\alpha) = \alpha^n \left(1 + b_{n-1}\frac{\alpha^{n-1}}{\alpha^n} + \ldots + b_1\frac{\alpha}{\alpha^n} + b_0\frac{1}{\alpha^n}\right),$$

$$P(\alpha) = \alpha^n \left(1 + \underbrace{\underset{\boxed{-1/n}}{\underset{\vee}{\boxed{\frac{b_{n-1}}{\alpha}}}} + \ldots + \underset{\boxed{-1/n}}{\underset{\vee}{\boxed{\frac{b_1}{\alpha^{n-1}}}}} + \underset{\boxed{-1/n}}{\underset{\vee}{\boxed{\frac{b_0}{\alpha^n}}}}}_{n\ \text{нерівностей}}\right) > \alpha^n\left(1 + n\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)\right) = 0.$$

Отримали суперечність.

Зауваження. З леми випливає, що два многочлени $P(x)$ і $Q(x)$, які набувають однакових значень для всіх дійсних x, повинні мати однаковий *стандартний* вигляд.

Задача 1.1. Нехай a, b і c — попарно різні дійсні числа. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}=1.$$

Розв'язання. Многочлен

$$f\left(x\right)=\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}-1$$

є або нуль-многочленом, або многочленом степеня, який не перевищує 2. Оскільки цей многочлен має щонайменше три корені (очевидно, зокрема, що $x=a$, $x=b$, $x=c$ задовольняють це рівняння), то $f\left(x\right)\equiv 0$.

Відповідь: $x\in\mathbf{R}$.

Зауваження. Інколи зручно «формально» вважати, що якщо $G(x)$ є нуль-многочленом, то $\deg G(x)=-\infty$ (тут $\deg G(x)$ — степінь многочлена).

У зв'язку з розібраною задачею важливо зупинитись на знаходженні такого многочлена $L_n(x)$, $-\infty\le\deg L_n(x)\le n$, що $L_n(x_j)=r_j$, $0\le j\le n$ (r_0, r_1, ... , r_n — задані дійсні числа). Неважко довести[1], що такий многочлен — якщо він існує — є єдиним. Але ж один многочлен з даними властивостями ми вказати можемо:

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n}r_j\prod_{\substack{k=0\\k\ne j}}^{n}\frac{x-x_k}{x_j-x_k}.$$

Такий многочлен називають *інтерполяційним многочленом Лагранжа*.

Вправа. Нехай a, b і c — попарно різні дійсні числа. Розв'яжіть рівняння

$$c\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+a\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}=x.$$

Для підготовки учнів до математичних змагань вищого рівня рекомендуємо використати задачі 23.15–23.19 [2], пов'язані з інтерполяційною формулою Лагранжа.

---

[1] Кострикин А.И. Введение в алгебру. Основы алгебры. Москва : Наука, 1994. 320 с.

[2] Зарубежные математические олимпиады. Конягин С.В. и др. Москва : Наука, 1987. 416 с.

ІІ. ЗНАЙОМСТВО З МЕТОДОМ ТАРТАЛЬЇ-КАРДАНО ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КУБІЧНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо спочатку *неповне* кубічне рівняння

$$x^3 + Mx + N = 0. \ (*)$$

Будемо шукати дійсний корінь такого рівняння у вигляді

$$x = \sqrt[3]{u+\sqrt{v}} + \sqrt[3]{u-\sqrt{v}}$$

(ми обмежуємось тут випадком $v \geq 0$).

Тоді

$$x^3 = \left(\sqrt[3]{u+\sqrt{v}}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{u-\sqrt{v}}\right)^3 + 3\sqrt[3]{u+\sqrt{v}}\,\sqrt[3]{u-\sqrt{v}}\left(\sqrt[3]{u+\sqrt{v}} + \sqrt[3]{u-\sqrt{v}}\right),$$

$$x^3 = u + \sqrt{v} + u - \sqrt{v} + 3\sqrt[3]{u^2 - v}\cdot x,$$

$$x^3 = 2u + 3\sqrt[3]{u^2 - v}\cdot x,$$

$$x^3 - 3\sqrt[3]{u^2 - v}\cdot x - 2u = 0.$$

Звідси, порівнюючи з (*), знаходимо:

$$-2u = N,\ u = -\frac{N}{2};\ -3\sqrt[3]{u^2 - v} = M,\ -3\sqrt[3]{\frac{N^2}{4} - v} = M,\ -27\left(\frac{N^2}{4} - v\right) = M^3,$$

$$\frac{N^2}{4} - v = -\frac{M^3}{27},\ v = \frac{N^2}{4} + \frac{M^3}{27}$$

(нагадаємо, що розглядається ситуація, коли $\frac{N^2}{4} + \frac{M^3}{27} \geq 0$).

Отже,

$$x = \sqrt[3]{-\frac{N}{2} + \sqrt{\frac{N^2}{4} + \frac{M^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{N}{2} - \sqrt{\frac{N^2}{4} + \frac{M^3}{27}}}.$$

Задача 2.1. Розв'яжіть кубічне рівняння $x^3 + x - \frac{1}{2} = 0$.

Розв'язання. Тут $M = 1$, $N = -\frac{1}{2}$. Тоді

$$\frac{N^2}{4} + \frac{M^3}{27} = \frac{43}{432},\ x = \sqrt[3]{\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{43}{432}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{43}{432}}}.$$

Інших дійсних розв’язків наше рівняння не має, оскільки функція $f(x)=x^3+x-\frac{1}{2}$ строго зростає на всій числовій прямій — як сума строго зростаючих функцій $y=x^3$ та $y=x-\frac{1}{2}$.

Відповідь: $x=\sqrt[3]{\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{43}{432}}}+\sqrt[3]{\frac{1}{4}-\sqrt{\frac{43}{432}}}$.

Зауваження. Описаний прийом дозволяє розв’язувати неповні кубічні рівняння і за умови $\frac{N^2}{4}+\frac{M^3}{27}<0$, а також знаходити не лише один, але й усі корені кубічного рівняння вигляду $x^3+Mx+N=0$ (для цього потрібно застосовувати теорію комплексних чисел).

Покажемо, що до випадку неповного кубічного рівняння $x^3+Mx+N=0$ легко зводиться загальна ситуація — рівняння $x^3+ax^2+bx+c=0$ (очевидно, що достатньо розглянути саме зведене кубічне рівняння).

Зробимо заміну змінної: $x=t-\frac{a}{3}$.

Матимемо:

$$\left(t-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(t-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(t-\frac{a}{3}\right)+c=0,$$

$$t^3\boxed{-3t^2\cdot\frac{a}{3}}+3t\cdot\frac{a^2}{9}-\frac{a^3}{27}\boxed{+at^2}-\frac{2a^2}{3}\cdot t+\frac{a^3}{9}+bt-\frac{ab}{3}+c=0,$$

$$t^3+\left(3\cdot\frac{a^2}{9}-\frac{2a^2}{3}+b\right)t+\left(c+\frac{a^3}{9}-\frac{a^3}{27}-\frac{ab}{3}\right)=0,$$

$$t^3+\left(b-\frac{a^2}{3}\right)t+\left(c+\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}\right)=0.$$

Вправа. Зведіть до неповного рівняння кубічне рівняння

$$x^3-3x^2+4x-6=0.$$

III. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ НЕВИЗНАЧЕНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ

Задача 3.1. Розкладіть на множники многочлен $x^4-8x+63$ методом невизначених коефіцієнтів.

Розв'язання. Неважко розв'язати цю задачу за допомогою виділення повного квадрата:

$$x^4-8x+63=\left(x^2+8\right)^2-1-16x^2-8x=\left(x^2+8\right)^2-\left(16x^2+8x+1\right)=$$

$$=\left(x^2+8\right)^2-(4x+1)^2=\left(x^2+4x+9\right)\left(x^2-4x+7\right).$$

Утім, ми проілюструємо на цьому прикладі іншу ідею.

Спочатку спробуємо з'ясувати, чи має це рівняння раціональні корені. Оскільки рівняння є *зведеним*, то перевіряти слід тільки цілі дільники вільного члена — числа 63, тобто ±1, ±3, ±7, ±9, ±21, ±63. Перевірка показує, що жодне з цих чисел не є коренем рівняння (до речі, зрозуміло, що для чисел ±7, ±9, ±21, ±63 відразу видно, що їхні четверті степені «надто великі»; це спостереження полегшує перевірку). Отже, раціональних коренів рівняння не має.

Ми взагалі не знаємо, чи має такий многочлен дійсні корені. Якщо має, то знаходження цих коренів — справа складна: вона потребує або використання спеціальних методів для рівнянь четвертого степеня, або «штучних» прийомів. Побудуємо «схематично» в одній системі координат з вибором зручного масштабу графіки функцій $y=x^4$ та $y=8x-63$. Ці графіки, як ми бачимо, не мають спільних точок (це дає підстави відкинути намагання знайти лінійні множники розкладу многочлена).

Будемо шукати розклад на квадратичні множники з цілими коефіцієнтами. Це пов'язано з певним «перебором» у формі застосування *методу невизначених коефіцієнтів*.

Нехай

$$x^4-8x+63=\left(x^2+\alpha x+\gamma\right)\left(x^2+\beta x+\delta\right).$$

Розкриємо дужки в правій частині тотожності та зведемо подібні члени. Матимемо:

$$x^4+(\alpha+\beta)x^3+(\delta+\gamma+\alpha\beta)x^2+(\alpha\delta+\beta\gamma)x+\gamma\delta=x^4-8x+63.$$

Многочлени, які знаходяться в правій та лівій частинах рівності, для всіх дійсних x набувають однакових значень, а тому, як ми знаємо, повинні мати однаковий стандартний вигляд. Це дозволяє нам прирівняти відповідні коефіцієнти:

$$\begin{cases} \alpha+\beta=0, \\ \delta+\gamma+\alpha\beta=0, \\ \alpha\delta+\beta\gamma=-8, \\ \gamma\delta=63. \end{cases}$$

Позаяк $\beta=-\alpha$, то

$$\begin{cases} \delta+\gamma=\alpha^2, \\ \alpha(\delta-\gamma)=-8, \\ \gamma\delta=63. \end{cases}$$

Нам достатньо лише **підібрати** трійку чисел α, γ і δ, що задовольняють систему: $\alpha=-4$, $\gamma=7$ і $\delta=9$.

Відтак,

$$x^4-8x+63=\left(x^2+4x+9\right)\left(x^2-4x+7\right).$$

Квадратні тричлени x^2+4x+9 і x^2-4x+7 мають від'ємні дискримінанти, а тому на лінійні множники не розкладаються, і наш многочлен 4-го степеня дійсних коренів насправді не має.

Відповідь: $x^4-8x+63=\left(x^2+4x+9\right)\left(x^2-4x+7\right)$.

Вправа. Методом невизначених коефіцієнтів розкладіть на множники многочлени x^4+x^2+1 та x^4+324.

Задача 3.2 (*журнал «Квант»*, № 11, 1986 р., задача М1015). Розкладіть на множники многочлен $F(x)=x^4+x^3+x^2+x+12$.

Розв'язання. Застосуємо такі перетворення:

$$F(x)=\frac{1}{8}(8x^4+8x^3+8x^2+8x+96)=\frac{1}{8}((3x^2-x+10)^2-(x^2-7x+2)^2)=$$
$$=\frac{1}{8}((4x^2-8x+12)(2x^2-6x+8))=(x^2-2x+3)(x^2-3x+4).$$

Вправа. Розв'яжіть задачу 3.2 методом невизначених коефіцієнтів.

IV. МЕТОД ФЕРРАРІ

Попередня задача наштовхує на корисну ідею розв'язування рівнянь четвертого степеня **методом Феррарі** (методом введення *допоміжного параметра*).

Задача 4.1. Розв'яжіть рівняння $x^4+4x^3-1=0$.

Розв'язання. Легко переконатись у тому, що це рівняння не має цілих (раціональних) коренів. З подальшого буде зрозумілим, що знайти розклад на множники лівої частини рівняння методом невизначених коефіцієнтів буде складно, оскільки деякі коефіцієнти квадратичних множників будуть числами ірраціональними.

Виділимо в лівій частині рівняння повний квадрат і запишемо рівняння у вигляді $\left(x^2+2x\right)^2=4x^2+1$. Будемо намагатись досягти того, щоб у правій та лівій частинах стояли повні квадрати (тоді ми зможемо їхню різницю розкласти на множники).

Додамо до правої та лівої частини останньої рівності «формальний» вираз $2\left(x^2+2x\right)a+a^2$ (це робиться для того, щоб у лівій частині ми отримали «готовий» повний квадрат):

$$\left(x^2+2x\right)^2+2\left(x^2+2x\right)a+a^2=4x^2+1+2\left(x^2+2x\right)a+a^2.$$

Звідки

$$\left(x^2+2x\right)^2+2\left(x^2+2x\right)a+a^2=(2a+4)x^2+4ax+a^2+1.$$

Знайдемо таке $a\neq-2$, щоб права частина також була повним квадратом. Для цього ми будемо вважати вираз у правій частині квадратним тричленом, і нам потрібно буде зробити так, щоб його дискримінант $D=16a^2-4(2a+4)\left(a^2+1\right)$ дорівнював нулю. Кубічне рівняння $a^3+a+2=0$ (його називають *резольвентою* многочлена 4-го степеня) розв'язати в нашому випадку неважко: його єдиним дійсним коренем буде $a=-1$.

Для $a=-1$ вихідне рівняння матиме вигляд

$$\left(x^2+2x\right)^2-2\left(x^2+2x\right)+1=2x^2-4x+2,$$

тобто

$$\left(x^2+2x-1\right)^2-2(x-1)^2=0\Leftrightarrow\left(x^2+2x-1\right)^2-\left(\sqrt{2}(x-1)\right)^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+2x-1+\sqrt{2}(x-1)\right)\left(x^2+2x-1-\sqrt{2}(x-1)\right)=0.$$

Якщо другий множник прирівняти до нуля, то отримаємо квадратне рівняння з від'ємним дискримінантом, а прирівнявши перший множник — отримаємо рівняння $x^2+\left(2+\sqrt{2}\right)x-\left(1+\sqrt{2}\right)=0$.

Відповідь: $x=\dfrac{-\left(2+\sqrt{2}\right)\pm\sqrt{10+8\sqrt{2}}}{2}$.

Зауваження. Метод Феррарі зручно застосовувати в ситуації, коли кубічне рівняння відносно a — резольвенту — розв'язати легко. У загальній ситуації метод Феррарі зводить розв'язування рівнянь 4-го степеня до розв'язування рівнянь 3-го степеня — резольвенти вихідного рівняння. Для розв'язування резольвентного кубічного рівняння слід у загальному випадку застосовувати метод Кардано-Тартальї. Якщо кубічна резольвента не має «зручних» (наприклад, раціональних) коренів, то розв'язування рівнянь методом Феррарі призводить хоча й до «алгоритмічних» дій, але дає «громіздкі» вирази для коренів рівняння 4-го степеня.

Задача 4.2. Розв'яжіть методом Феррарі рівняння

$$x^4-4x^3+7x^2-2x-5=0.$$

Розв'язання. Виділяємо повний квадрат і записуємо рівняння у вигляді

$$\left(x^2-2x\right)^2=-3x^2+2x+5.$$

Вводимо допоміжний параметр a:

$$\left(x^2-2x\right)^2+2\left(x^2-2x\right)a+a^2=2ax^2-4ax+a^2-3x^2+2x+5,$$

$$\left(x^2-2x\right)^2+2\left(x^2-2x\right)a+a^2=\left(2a-3\right)x^2+\left(2-4a\right)x+a^2+5.$$

Розглядаємо $a\neq\dfrac{3}{2}$ і складаємо резольвенту рівняння, прирівнюючи відповідний дискримінант до нуля. Резольвентою буде рівняння $2a^3-7a^2+14a-16=0$ (його неважко розв'язати).

Вихідне рівняння набуде вигляду $\left(x^2-3x+5\right)\left(x^2-x-1\right)=0$ (цей розклад можна отримати й методом невизначених коефіцієнтів).

Відповідь: $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

V. МНОГОЧЛЕНИ ТА ІРРАЦІОНАЛЬНІСТЬ ДЕЯКИХ ЧИСЕЛ

Задача 5.1. Знайдіть ненульовий многочлен з цілими коефіцієнтами, одним з коренів якого є число $x=\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}$.

Розв'язання. Маємо: $x+\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{2}$. Піднесемо обидві частини рівності до куба, використовуючи тотожність $(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$:

$$2=x^3+3+3x\sqrt[3]{3}\,\underbrace{(x+\sqrt[3]{3})}_{\sqrt[3]{2}}.$$

Тобто

$$x^3+3+3x\sqrt[3]{6}=2,\ x^3+1=-3x\sqrt[3]{6},\ \left(x^3+1\right)^3=-27\cdot 6\cdot x^3.$$

Отже, шуканим многочленом буде $P(x)=(x^3+1)^3+162x^3$. Якщо розкриємо дужки та зведемо подібні, то одержимо стандартний вигляд цього многочлена з цілими коефіцієнтами.

Зауваження. Многочлен $P(x)$ є зведеним многочленом 9-го степеня з цілими коефіцієнтами. Вільний член цього многочлена дорівнює 1. Такий факт дозволяє легко довести ірраціональність числа $x=\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}$. Насправді, якби число $x=\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}$ було *раціональним* коренем *зведеного* рівняння $P(x)=0$, то, за теоремою Гаусса, то воно було б *цілим* і містилось би серед дільників вільного члена. Але ж дільники вільного члена — числа 1 та −1 — не є коренями складеного рівняння (до того ж, очевидно, $\left|\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}\right|\neq 1$).

Вправа. Знайдіть ненульовий многочлен з цілими коефіцієнтами, одним з коренів якого є число $x=\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{7}$, та за допомогою знайденого многочлена доведіть ірраціональність даного числа.

Вправа (*IV етап Всеукраїнської олімпіади*, 1993 р.). Знайдіть ненульовий многочлен дев'ятого степеня з цілими коефіцієнтами, одним з коренів якого є число $x=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}$, та за допомогою знайденого многочлена доведіть ірраціональність даного числа.

Відповідь: $P(x)=x^9-165x^6+3x^3-1$.

Теорема. Нехай для $\alpha \in (0;\pi/2)$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{3}$, число $\cos\alpha$ є раціональним. Тоді $\dfrac{\alpha}{\pi}$ — ірраціональне число (тобто величини α і π є несумірними).

Доведення. Покажемо, застосовуючи метод математичної індукції, що для будь-якого $n \in \mathbf{N}$ $2\cos nx$ можна подати у вигляді *зведеного* многочлена n-го степеня з цілими коефіцієнтами відносно $t = 2\cos x$.

Випадки $n = 1$ і $n = 2$ є очевидними. Припустимо, що воно виконується для $n = k$ і $n = k + 1$.

Візьмемо тепер $n = k + 2$. Індукційний крок забезпечується тотожністю

$$2\cos(k+2)x = 2\cos x \cdot 2\cos(x+1)x - 2\cos kx,\ x \in \mathbf{R}.$$

Отже, припустимо, що $\alpha = \dfrac{m}{n} \cdot \pi$, $m \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$. Тоді $2\cos n\alpha = 2 \cdot (-1)^m$. З іншого боку, як ми встановили вище, для деяких цілих a_1, a_2, ... , a_n

$$2\cos n\alpha = (2\cos\alpha)^n + a_1(2\cos\alpha)^{n-1} + a_2(2\cos\alpha)^{n-2} + \ldots + a_n,$$

і число $2\cos\alpha$ є раціональним (а тому й цілим!) коренем рівняння

$$t^n + a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + \ldots + a_n - 2 \cdot (-1)^m = 0.$$

Звідси випливає, що $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$, що неможливо.

Задача 5.2 (*IV етап Всеукраїнської олімпіади*, 1992 р.). Доведіть, що число $\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}$ є ірраціональним.

Розв'язання. Скористаємося тотожністю

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ x \in \mathbf{R},$$

і отримаємо, що $\cos\left(\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{3}{5}$. Твердження задачі випливає із доведеної теореми.

Зауваження. Пропонуємо ознайомитись і з більш складним доведенням[3].

[3] Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А. Математичні олімпіади школярів України (1991-2000) : навч.-метод. посіб. Київ : Техніка, 2003. 541 с.

VI. ДЕКІЛЬКА ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Задача 6.1. Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt[3]{3x+24}-\sqrt[3]{2x+6}=\sqrt[3]{x} \quad (1).$$

Розв'язання. Піднесемо обидві частини рівняння до куба (це — рівносильний перехід), скориставшись тотожністю $(u-v)^3=u^3-v^3-3uv(u-v)$:

$$3x+24-(2x+6)-3\sqrt[3]{3x+24}\sqrt[3]{2x+6}\left(\boxed{\sqrt[3]{3x+24}-\sqrt[3]{2x+6}}\right)=x.$$

Скориставшись тим, що шукане x повинно задовольняти рівність (1), маємо **рівняння-наслідок** (це, як ми з'ясуємо в подальшому, *нерівносильний* перехід, який потребує перевірки!):

$$3x+24-(2x+6)-3\sqrt[3]{3x+24}\sqrt[3]{2x+6}\boxed{\sqrt[3]{x}}=x,$$

тобто

$$\sqrt[3]{3x+24}\sqrt[3]{2x+6}\sqrt[3]{x}=6 \Leftrightarrow x(3x+24)(2x+6)=36 \Leftrightarrow x^3+11x^2+24x-36=0.$$

Для розв'язання останнього рівняння випишемо всі цілі (зауважимо, що оскільки многочлен з цілими коефіцієнтами є зведеним, то — за лемою Гаусса — усі його раціональні корені є числами цілими) дільники вільного члена: ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±9, ±18, ±36.

Простою перевіркою переконуємось, що $x=1$ є коренем рівняння. Ми знайшли один з коренів многочлена третього степеня, а тому варто поділити многочлен $x^3+11x^2+24x-36$ на $x-1$, щоб звести задачу до розв'язування квадратного рівняння. Виконаємо ділення «кутом» (або ж застосуємо схему Горнера):

$$\begin{array}{l|l}
x^3+11x^2+24x-36 & x-1 \\ \hline
\underline{x^3-x^2} & x^2+12x+36 \\
\quad 12x^2+24x & \\
\quad \underline{12x^2-12x} & \\
\qquad 36x-36 & \\
\qquad \underline{36x-36} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Отже, отримали рівняння $(x-1)(x+6)^2=0$. Це рівняння має розв'язки $x=1$ та $x=-6$.

Утім, перевірка показує, що $x=1$ є коренем рівняння (1), а $x=-6$ — ні (!).

Відповідь: 1.

Зауваження. Неважко бачити, що

$$\boxed{a+b=c \Leftrightarrow a^3+b^3+3ab(a+b)=c^3},$$

але

$$\boxed{a+b=c \not\Leftrightarrow a^3+b^3+3abc=c^3}$$

(насправді, $1^3+1^3+3\cdot1\cdot1\cdot(-1)=(-1)^3$, але $1+1\neq-1$).

Вправа. Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{x-1}.$$

Вправа. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{x^2}{\sqrt{3x-2}}+2\sqrt{3x-2}=3x.$$

Вказівка. Знайдемо ОДЗ рівняння: $x>\frac{2}{3}$. На ОДЗ вихідне рівняння запишемо у вигляді

$$x^2-3x\sqrt{3x-2}+2\left(\sqrt{3x-2}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{3x-2}}\right)^2-3\cdot\frac{x}{\sqrt{3x-2}}+2=0.$$

Слід зробити заміну $t=\frac{x}{\sqrt{3x-2}}$.

VII. ПРО ДИСКРИМІНАНТ НЕПОВНОГО КУБІЧНОГО РІВНЯННЯ

Розглянемо многочлен $f\left(x\right)=x^3+px+q$ і відповідне рівняння $f\left(x\right)=0$.

Для $p\geq 0$ рівняння має єдиний дійсний корінь. Нехай $p<0$. Неважко довести, що $x_1=-\sqrt{-\frac{p}{3}}$ — точка локального максимуму функції f, $x_2=\sqrt{-\frac{p}{3}}$ — точка локального мінімуму функції f.

Маємо:

- якщо $f\left(x_1\right)f\left(x_2\right)>0$, то рівняння має єдиний дійсний корінь;
- якщо $f\left(x_1\right)f\left(x_2\right)<0$, то рівняння має три різні дійсні корені;
- якщо $f\left(x_1\right)f\left(x_2\right)=0$, то рівняння має один простий дійсний корінь та один дійсний корінь подвійної кратності.

(Пропонуємо зробити графічну ілюстрацію та навести конкретний приклад до кожної з цих ситуацій.)

Величина $\Delta=\frac{1}{4}f\left(x_1\right)f\left(x_2\right)$ називається *дискримінантом* кубічного рівняння $x^3+px+q=0$.

Через його коефіцієнти Δ виражається (пропонуємо слухачам зробити це самостійно) формулою

$$\Delta=\frac{1}{4}q^2+\frac{p^3}{27}.$$

VIII. ОСОБЛИВОСТІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ, ПОВ'ЯЗАНИХ З ІТЕРАЦІЯМИ ФУНКЦІЙ

Рівняння *ітераційного* типу пропонуються як в матеріалах математичних олімпіад різних рівнів, так і під час поглибленого вивчення математики. Такі задачі вимагають від учнів володіння широким спектром технічних навичок, високого рівня теоретичної підготовки, зорема — функціональної культури, формування якої в сьогоднішніх реаліях шкільної математичної освіти є надзвичайно складною методичною й дидактичною проблемою.[4] [5]

Для *ітерацій* числової функції f будемо використовувати спеціальні позначення: $f^{(m)}(x)=\underbrace{f(f(\ldots f(x)\ldots))}_{m\text{ разів}}$, $m\geq 2$; $f^{(1)}(x)=f(x)$.

Лема 1. Нехай $n\geq 2$ — задане натуральне число. Якщо функція $f:X\to\mathbf{R}$ зростає (не обов'язково строго) на непорожній множині $X\subset\mathbf{R}$, то для $x_0\in X$ рівність $f^{(n)}(x_0)=x_0$ виконується тоді й тільки тоді, коли виконується рівність $f(x_0)=x_0$.

Доведення. Якщо $f(x_0)=x_0$, то $f^{(n)}(x_0)=x_0$, $n\in\mathbf{N}$. Нехай $f^{(n)}(x_0)=x_0$, але $f(x_0)\neq x_0$ (звернемо увагу на те, що для обраного $x_0\in X$ визначені $f^{(k)}(x_0)$, $1\leq k\leq n$, і $f^{(k)}(x_0)\in X$ для всіх k, $1\leq k\leq n-1$, $x_0=f^{(n)}(x_0)\in X$; при цьому ми не вимагаємо, щоб $E(f)\subset X$). Якщо $f(x_0)>x_0$, то $f(f(x_0))\geq f(x_0)>x_0$, і т. д. Матимемо: $f^{(n)}(x_0)>x_0$, $n\in\mathbf{N}$. Аналогічно одержуємо суперечність, якщо $f(x_0)<x_0$.

Задача 8.1. Для кожного дійсного значення параметра a розв'яжіть рівняння

$$\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a+\sqrt{a+x}}}}}_{n\text{ разів}}=x.$$

---

[4] Мітельман І. М. Розвиток предметно-галузевих компетентностей учителів математики в контексті формування згорнутих дидактичних структур. *Професійна компетентність сучасного педагога: методологія, теорія, методика, практика* : колект. моногр. Одеська акад. неперервної освіти. Одеса : видавець Букаєв Вадим Вікторович, 2019. С. 241–257.

[5] Мітельман І.М. Особливості теоретичного й методичного забезпечення розв'язування рівнянь, пов'язаних з ітераціями функцій. *Математика в рідній школі*. 2020. № 3. С. 34–37.

Розв'язання (для $n=2$ розглядаються також і інші способи розв'язування[6]). Функція $f(x)=\sqrt{a+x}$ строго зростає на своїй області визначення — проміжку $[-a;+\infty)$. Звернемо увагу на те, що в лемі 1 не вимагається, щоб множина значень такої функції була підмножиною її області визначення — множини $[-a;+\infty)$ (наприклад, для функції $f(x)=\sqrt{-1+x}$ $D(f)=[1;+\infty)$, $E(f)=[0;+\infty)$), тому з методичної та математичної точки зору варто надавати перевагу наведеному вище варіанту леми 1 у порівнянні з формулюванням «близького» за змістом більш відомого факту[7].

Відтак, маємо розглядати рівняння $\sqrt{a+x}=x$, рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2-x-a=0, \\ x\geq 0. \end{cases}$$

Для цього на «допоміжній» координатній площині Oxa зображаємо графік $a=x^2-x$, $x\geq 0$, і встановлюємо, що для $a=-\frac{1}{4}$ і всіх $a>0$ рівняння має один корінь $x=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$, для кожного $a\in\left(-\frac{1}{4};0\right]$ рівняння має два корені $x=\frac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$, для $a<-\frac{1}{4}$ рівняння розв'язків не має.

Варто розібрати низку корисних вправ для застосування цих ідей (Воробйова А.І., Лейфура В.М. Рівняння з «трикрапками», або дещо про ітерації та границі. *Наша школа*. 2009. № 6. С. 49–57).

Лема 2. Якщо $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ — строго зростаючі взаємно обернені функції, то рівняння $f(x)=g(x)$ і $f(x)=x$ рівносильні.

Доведення. Маємо:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(f(x))=f(g(x))\Leftrightarrow f(f(x))=x\Leftrightarrow f(x)=x.$$

Зауваження. Лема 2 подається у вигляді, найбільш зручному для такої задачі.

[6] Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Москва : Наука, 1987. 240 с.

[7] Воробйова А.І., Лейфура В.М. Рівняння з «трикрапками», або дещо про ітерації та границі. *Наша школа*. 2009. № 6. С. 49–57.

Задача 8.2. Розв'яжіть рівняння $\frac{1}{6}x^3-2=\sqrt[3]{6x+12}$.

Розв'язання. Функції $f(x)=\frac{1}{6}x^3-2$, $g(x)=\sqrt[3]{6x+12}$ є строго зростаючими на всій числовій прямій та взаємно оберненими. І тому (див. лему 2) задане рівняння рівносильне рівнянню $\frac{1}{6}x^3-2=x$, тобто $x^3-6x-12=0$ $(*)$. Нехай $\varphi(x)=x^3-6x-12$. Розв'язками рівняння $\varphi'(x)=0$ будуть $x=\pm\sqrt{2}$. Перевіряємо, що $\varphi(\pm\sqrt{2})<0$, і з цього випливає єдиність дійсного кореня рівняння $(*)$.

Цей корінь знайдемо методом Кардано. Подамо α у вигляді

$$\alpha=\sqrt[3]{u+\sqrt{v}}+\sqrt[3]{u-\sqrt{v}},$$

тоді

$$\alpha^3-3\alpha\sqrt[3]{u^2-v}-2u=0,$$

і маємо: $u=6$, $v=28$.

Відповідь: $x=\sqrt[3]{6+2\sqrt{7}}+\sqrt[3]{6-2\sqrt{7}}$.

Лема 3. Якщо функція $f:\langle a;b\rangle\to\langle a;b\rangle$ **неперервна** на проміжку $\langle a;b\rangle$, $-\infty\le a<b\le+\infty$ (символом $\langle a;b\rangle$ позначається будь-який з проміжків типу $(a;b)$, $[a;b]$, $(a;b]$, $[a;b)$), і не має на ньому *нерухомих точок*, то й будь-яка її ітерація не матиме на ньому нерухомих точок.

Доведення. Якщо для всіх $x\in\langle a;b\rangle$ $f(x)\ne x$, то — з урахуванням неперервності функції f — або $f(x)>x$ для всіх $x\in\langle a;b\rangle$, або ж $f(x)<x$ для всіх $x\in\langle a;b\rangle$. Якщо $f(x)>x$ для всіх $x\in\langle a;b\rangle$, то $f(f(x))>f(x)>x$, і т. д. Аналогічно — якщо $f(x)<x$ для всіх $x\in\langle a;b\rangle$.

Задача 8.4 (*Всесоюзна олімпіада*, 1973 р.). Довдіть, що якщо для квадратного тричлена $Q(x)$ рівняння $Q(x)=x$ не має коренів, то й рівняння $Q(Q(x))=x$ також не має коренів.

Розв'язання безпосередньо випливає з леми 3.

Задача 8.5. Нехай $f(x)=x^2-x+1$. Для $m\ge 2$ розв'яжіть рівняння

$$f^{(m)}(x)=x$$

(тут $f^{(m)}(x)=\underbrace{f(f(\ldots f(x)\ldots))}_{m\text{ разів}}$, $m\ge 2$; $f^{(1)}(x)=f(x)$).

Розв'язання. Нерухома точка функції f є нерухомою точкою всіх її ітерацій, причому, зауважимо, $x=1$ — єдина нерухома точка функції f. Оскільки $f(u) \geq u$ для всіх $u \in \mathbf{R}$, то для $x \neq 1$ маємо такий «ланцюжок» нерівностей:

$$f^{(m)}(x) \geq f^{(m-1)}(x) \geq \ldots \geq f(x) > x.$$

Відповідь: $x=1$.

Задача 8.6 (*І Соросівська олімпіада школярів Росії*, міжпредметний тур, 1995 р.). Розв'яжіть рівняння $2-x=(2-x^3)^3$.

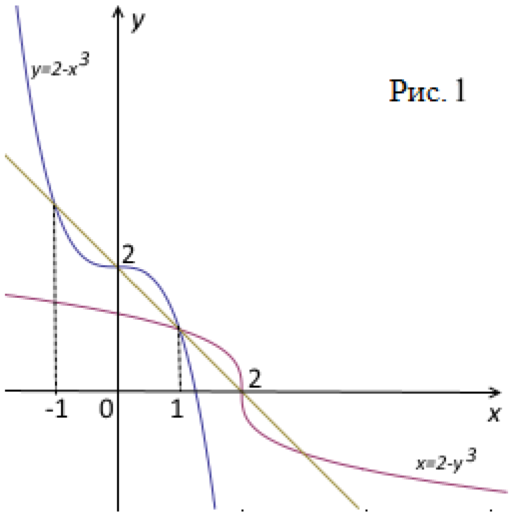

Рис. 1

Розв'язання. Звернемо увагу на те, що функція $f(x)=2-x^3$ спадає, тому лему 1 тут застосувати не вдається, хоча рівняння й має вигляд $f(f(x))=x$, де $f(x)=2-x^3$.

Розв'язання рівняння, зрозуміло, зводиться до розв'язання системи

$$\begin{cases} y=2-x^3, \\ x=2-y^3. \end{cases}$$

Зобразимо в одній системі координат відповідні графіки, а також — для подальших міркувань — пряму, задану рівнянням $y+x=2$ (рис. 1). Рисунок дозволяє нам *припустити*, що єдиним розв'язком системи є $x=y=1$ (тоді $x=1$ — єдиний корінь нашого рівняння). Доведемо, що інших коренів насправді немає.

Виходячи із симетрії відносно прямої $y=x$ та із спадання функцій $y=2-x^3$, $y=\sqrt[3]{2-x}$, $y=2-x$, бачимо, що достатньо довести, що в області $\{(x,y): x<1,\ y>1\}$ графік рівняння $y=2-x^3$ розташований «вище» від графіка рівняння $x=2-y^3$.

Для зручності скористаємось як «посередником» прямою $y+x=2$. На множині $\{(x,y):\ x \in (-\infty;-1] \cup [0;1),\ y>1\}$ маємо: $2-x^3 \geq 2-x$, $2-y>2-y^3$. В області $\{(x,y):\ -1<x<0,\ y>1\}$ $2-x^3>2>\sqrt[3]{2-x}$.

Відповідь: $x=1$.

Задача 8.7. Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt[3]{2-\sqrt[3]{2-\sqrt[3]{2-\sqrt[3]{2-x}}}}=x.$$

Розв'язання. Для спадної функції $h(x)=\sqrt[3]{2-x}$ функція $g(x)=h(h(x))$ зростає на всій числовій прямій, і тому рівняння $g(g(x))=x$ і $h(h(x))=x$ є рівносильними. Зауважимо тепер, що рівняння $h(h(x))=x$ легко зводиться до рівняння задачі 8.6.

Відповідь: $x=1$.

Задача 8.8. Розв'яжіть рівняння $x^2-5=\sqrt{x+5}$.

Розв'язання. Позначимо $f(x)=x^2-5$. Тоді наше рівняння є рівносильним системі

$$\begin{cases} f(f(x))=x, \\ f(x)\geq 0. \end{cases}$$

Зрозуміло, що властивості функції f не дозволяють для розв'язання рівняння $f(f(x))=x$ використати лему 1. Утім, якою б не була функція ψ, кожен розв'язок рівняння $\psi(x)=x$ задовольняє рівність $\psi^{(n)}(x)=x$ для всіх $n\in\mathbf{N}$ (звернемо увагу на те, що йдеться не лише про дійсні корені), і тому в нашій задачі многочлен $P(x)=f(f(x))-x$ ділиться без остачі на многочлен $Q(x)=f(x)-x$. Це дає нам можливість легко розкласти вираз $f(f(x))-x=x^4-10x^2-x+20$ на множники:

$$x^4-10x^2-x+20=(x^2-x-5)(x^2+x-4).$$

Залишається розв'язати відповідні квадратні рівняння й взяти до уваги умову $x^2\geq 5$.

Відповідь: $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{17}}{2}$; $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Зауваження 1. Згадаємо тут ще один — «олімпіадний» — спосіб розв'язування рівняння $x^4-10x^2-x+20=0$, пов'язаний з певною «параметризацією». Запишемо рівняння у вигляді $x^4-10x^2-x+25-5=0$ і позначимо $u=5$. Тоді маємо: $u^2-(2x^2+1)u+x^4-x=0$. Звідси дістаємо сукупність

$$\left[\begin{array}{l} 2x^2+1+(2x+1)=10, \\ 2x^2+1-(2x+1)=10. \end{array}\right.$$

Зауваження 2. Повернувшись до задачі 8.6, зауважимо, що многочлен $F(x)=(2-x^3)^3+x-2$ ділиться без остачі на $L(x)=x^3+x-2$:

$$F(x)=-(x-1)(x^2+x+2)(x^6-x^4-4x^3+x^2+2x+3).$$

Оскільки $x=1$ є єдиним дійсним коренем рівняння $F(x)=0$, причому — першої кратності, то звідси випливає, що для всіх $x \in \mathbf{R}$ виконується нерівність $x^6 - x^4 - 4x^3 + x^2 + 2x + 3 > 0$.

Задача 8.9. Скільки різних дійсних коренів має рівняння

$$(x^4-5)^5 = 5 - \frac{24}{x^4}?$$

Вказівка. Маємо:

$$\begin{cases} (x^5-5x)^5 - 5(x^5-5x) = x, \\ x \neq 0 \end{cases}$$

(знов-таки, звернемо увагу на те, що рівняння із системи також має вигляд $f(f(x)) = x$, але для функції $f(x) = x^5 - 5x$ лему 1 ми застосувати не можемо). Аналогічно до задачі 8.6, рівняння зводиться до системи

$$\begin{cases} y = x^5 - 5x, \\ x = y^5 - 5y, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Відповідь: 8 різних дійсних коренів (див. *схематичний* рис. 2).

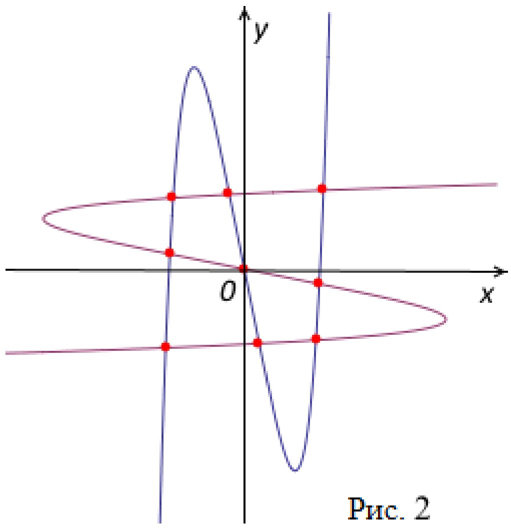

Рис. 2

Як узагальнення леми 1 запропонуємо таку теорему.

Теорема. Нехай $n \geq 2$ — задане натуральне число. Якщо для функції f, що розглядається на непорожній множині $M \subset \mathbf{R}$, функція $\varphi(x) = x + \sum_{k=1}^{n-1} f^{(k)}(x)$ є визначеною та *ін'єктивною* на цій множині (тобто для $u \neq v$ $\varphi(u) \neq \varphi(v)$), то для $x_0 \in M$ рівність $f^{(n)}(x_0) = x_0$ виконується тоді й тільки тоді, коли виконується рівність $f(x_0) = x_0$.

Доведення. Якщо $f(x_0) = x_0$, то $f^{(n)}(x_0) = x_0$, $n \in \mathbf{N}$. Для обраного x_0 $f^{(k)}(x_0) \in M$ для всіх k, $1 \leq k \leq n-1$, $x_0 = f^{(n)}(x_0) \in M$. Нехай $f^{(n)}(x_0) = x_0$, але $f\left(x_0\right) \neq x_0$. Тоді $\varphi(f(x_0)) \neq \varphi(x_0)$, тобто

$$f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} f^{(k)}(f(x_0)) \neq x_0 + \sum_{k=1}^{n-1} f^{(k)}(x_0),$$

$$\sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(x_0) \neq x_0 + \sum_{k=1}^{n-1} f^{(k)}(x_0),\ f^{(n)}(x_0) \neq x_0,$$

що суперечить припущенню.

Зауваження. Нехай функція $f : X \to \mathbf{R}$ зростає (не обов'язково строго) на непорожній множині $X \subset \mathbf{R}$. Позначимо $M = \bigcap_{k=1}^{n-1} D(f^{(k)})$, $M \subset X$. Якщо $M \neq \varnothing$, то функція $\varphi(x) = x + \sum_{k=1}^{n-1} f^{(k)}(x)$ на множині M зростає **строго**, а тому є ін'єктивною. Звідси, відповідно до доведеної теореми, ми встановлюємо, що для $x_0 \in M$ рівність $f^{(n)}(x_0) = x_0$ виконується тоді й тільки тоді, коли виконується рівність $f(x_0) = x_0$ (якщо рівність $f^{(n)}(x_0) = x_0$ має місце для $x_0 \in X = D(f)$, то, очевидно, що $x_0 \in M$). Відтак, ми бачимо, що лема 1 випливає з цієї теореми.

Наслідок. Якщо функція f неперервна на проміжку $\langle a;b \rangle$ і має похідну в кожній точці проміжку $(a;b)$, причому для всіх $x \in (a;b)$ $f'(x) \neq -1$, то для $x_0 \in \langle a;b \rangle$ рівність $f(f(x_0)) = x_0$ виконується тоді й тільки тоді, коли виконується рівність $f(x_0) = x_0$.[8]

Доведення. Нехай $\alpha \in \langle a;b \rangle$, $\beta \in \langle a;b \rangle$, $\alpha \neq \beta$. Вважаємо, що $\alpha < \beta$. За теоремою Лагранжа, існує таке $\xi \in (\alpha;\beta)$, що $f(\beta) - f(\alpha) = f'(\xi)(\beta - \alpha)$. Оскільки $f'(\xi) \neq -1$, то $f(\beta) - f(\alpha) \neq \alpha - \beta$, $f(\beta) + \beta \neq f(\alpha) + \alpha$, і функція $\varphi(x) = f(x) + x$ є ін'єктивною на проміжку $\langle a;b \rangle$.

Задача 8.10. Розв'яжіть рівняння

$$(2x^3 - x + 10)^3 - 2(2x^3 - x + 10) + 40 = 8x.$$

Розв'язання. Нехай $f(x) = x^3 - \frac{x}{2} + 5$. Тоді вихідне рівняння набуде вигляду $f(f(x)) = x$. Функція $\varphi(x) = x + f(x)$ строго зростає на $\mathbf{R}$ і тому є ін'єктивною (можна, як неважко бачити, скористатись і наслідком з теореми). Отже, маємо розв'язати рівняння $f(x) = x$.

Відповідь: $x = -2$.

[8] Чучаев И., Смольянова Е. Уравнения вида $f(f(x)) = x$ и симметрия. *Математика*. 1998. № 5. С. 13–14.